

Champ d'autocontrainte dans un cylindre

On considère un solide dont la configuration d'équilibre est un cylindre de révolution Ω de hauteur h et de rayon R constitué des points $\underline{x}$ tels que $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $0 \leq z \leq h$ dans le repère $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. On suppose que les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ dans ce repère s'écrivent

$$\sigma_{xx} = -A(R^2 - x^2 - 3y^2), \quad \sigma_{xy} = -2Axy, \quad \sigma_{yy} = -A(R^2 - 3x^2 - y^2),$$

et $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$.

1. Dans quelles unités s'exprime la constante A ? Sachant que le système est à l'équilibre, calculer les forces massiques $\underline{b}$.
2. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\underline{e}_r = (x\underline{e}_x + y\underline{e}_y)/r$ et $\underline{e}_\theta = (-y\underline{e}_x + x\underline{e}_y)/r$. Calculer $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r$ et $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_\theta$. En déduire les composantes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} et $\sigma_{\theta z}$ dans le repère $(0, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ des coordonnées cylindriques.
3. Calculer les forces surfaciques $\underline{T}^d$ exercées sur le cylindre par son extérieur.
4. On suppose que $A > 0$ mesure l'intensité du serrage qui conduit à l'état d'autocontraintes décrit par le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. Quelle est la valeur maximale de A lorsque le critère de rupture du matériau est gouverné par le critère de Tresca

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_0 \leq 0,$$

où σ_0 est une constante caractéristique du matériau et σ_i et σ_j les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$?

Solution :

1. Les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ s'expriment en Pa et les position x et y ainsi que le rayon R en m, alors la constante A s'exprime en Pa/m².
Puisque le système est à l'équilibre, on peut écrire $\rho \underline{b} = -\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})$. On en déduit alors $\underline{b} = \underline{0}$ puisque

$$\begin{aligned} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \underline{e}_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \underline{e}_y \\ &= (2Ax - 2Ax) \underline{e}_x + (-2Ay + 2Ay) \underline{e}_y = \underline{0} \end{aligned}$$

2. Le calcul des produits suivant :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r &= -\frac{Ax}{r}(R^2 - x^2 - 3y^2 + 2y^2) \underline{e}_x - \frac{Ay}{r}(R^2 - 3x^2 - y^2 + 2x^2) \underline{e}_y = -A(R^2 - r^2) \underline{e}_r \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_\theta &= \frac{Ay}{r}(R^2 - x^2 - 3y^2 - 2x^2) \underline{e}_x - \frac{Ax}{r}(R^2 - 3x^2 - y^2 - 2x^2) \underline{e}_y = -A(R^2 - 3r^2) \underline{e}_\theta \end{aligned}$$

permet d'écrire le tenseur des contraintes sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ avec

$$\sigma_{rr} = -A(R^2 - r^2), \quad \sigma_{\theta\theta} = -A(R^2 - 3r^2) \quad \text{et} \quad \sigma_{zz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$$

3. — Sur la surface S_h d'équation $z = h$ et de normale sortante $\underline{e}_z$, on a

$$\underline{T}^d = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = \underline{0}$$

— Sur la surface S_0 d'équation $z = 0$ et de normale sortante $-\underline{e}_z$, on a

$$\underline{T}^d = -\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = \underline{0}$$

— Sur la surface cylindrique d'équation $r = R$ et de normale sortante $\underline{e}_r$, on a

$$\underline{T}^d = -\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r = -A(R^2 - r^2)\underline{e}_r = \underline{0}$$

En conclusion, $\underline{T}^d = \underline{0}$ sur toute la frontière du cylindre.

4. Comme $\underline{\underline{\sigma}}$ est diagonale, alors ses contraintes principales sont $\sigma_I = \sigma_{rr} = -A(R^2 - r^2)$, $\sigma_{II} = \sigma_{\theta\theta} = -A(R^2 - 3r^2)$ et $\sigma_{III} = \sigma_{zz} = 0$.

Le maximum de $|\sigma_I - \sigma_{II}| = 2Ar^2$, $|\sigma_I - \sigma_{III}| = A(R^2 - r^2)$ et $|\sigma_{II} - \sigma_{III}| = A|R^2 - 3r^2|$ pour tous les $r \in [0, R]$ est $2AR^2$. pour éviter la rupture du solide, gouvernée par le critère de Tresca, il faut alors

$$2AR^2 - \sigma_0 \leq 0 \Rightarrow A \leq \frac{\sigma_0}{2R^2}$$